Učební texty k přednášce ALGEBRA II
Michal Marvan
Slezská univerzita v Opavě

20. Tenzory

Zobecněním bilineární formy jsou polylineární formy. Nazývají se též kovariantní tenzory. Hojně se vyskytují ve fyzice spolu s tenzory kontravariantními a smíšenými. Omezíme se na reálný případ. Opět používáme Einsteinovu sumační konvenci.

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem $\mathbf{R}$. Buď p přirozené číslo, označme $V^p = V \times \cdots \times V$ (p krát). Zobrazení $f : V^p \to \mathbf{R}$, splňující pro libovolné vektory $u_i, u'_i, u''_i \in V$, libovolný skalár $a \in \mathbf{R}$ a každý index $i = 1, \ldots, p$ podmínky

$$\begin{aligned} &f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u'_i + u''_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ &\quad = f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u'_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u''_i, u_{i+1}, \ldots, u_p), \\ &f(u_1, \ldots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) = af(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

(linearita v $i$tém argumentu), se nazývá *p-lineární forma* nebo též *kovariantní tenzor řádu p* na V.

1-lineární forma je lineární zobrazení $V \to \mathbf{R}$, 2-lineární forma je bilineární forma.

Příklad. Nechť $V = \mathbf{R}^n$. Pro vektory $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n), \ldots, x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^n) \in \mathbf{R}^n$ položme

$$\epsilon(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Z vlastností determinantu vyplývá, že ϵ je n-lineární forma na $\mathbf{R}^n$ (cvičení).

Definice. Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $e_1, \ldots, e_n$, buď f p-lineární forma na V. Čísla $f_{i_1 \ldots i_p} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ se nazývají *složky* formy f vzhledem k bázi $e_1, \ldots, e_n$.

Příklad. Složky bilineární formy jsou právě prvky její matice: $B_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Cvičení. Složky n-formy ϵ zadané determinantem jsou (ve standardní bázi prostoru $\mathbf{R}^n$)

$$\epsilon_{i_1 \cdots i_n} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n) & \text{jsou-li } i_1, \ldots, i_n \text{ po dvou různá čísla,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $e_1, \ldots, e_n$, buď f p-lineární forma na V, která má vzhledem k uvedené bázi složky $f_{i_1 \ldots i_p}$. Buďte $u_1, \ldots, u_p$ libovolné vektory, které mají v bázi $e_1, \ldots, e_n$ souřadnice po řadě $(x_1^1, \ldots, x_1^n), \ldots, (x_p^1, \ldots, x_p^n)$. Pak platí*

$$f(u_1, \ldots, u_p) = f_{i_1 \ldots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}. \tag{1}$$

Důkaz. $f(u_1, \ldots, u_p) = f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = f_{i_1 \ldots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$.

Při změně báze $e_1, \dots, e_n$ se mění i složky $f_{i_1 \dots i_p}$.

Tvrzení. *Buď Q matice přechodu od báze $e_1, \dots, e_n$ k nové bázi $e'_1, \dots, e'_n$. Složky p-lineární formy f vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$ buďte $f_{i_1 \dots i_p}$, složky téže formy vzhledem k bázi $e'_1, \dots, e'_n$ buďte $f'_{i_1 \dots i_p}$. Pak platí*

$$f'_{i_1 \dots i_p} = Q_{i_1}^{j_1} \cdots Q_{i_p}^{j_p} f_{j_1 \dots j_p}. \tag{2}$$

Důkaz. Cvičení.

Ve fyzice se obvykle zavádí kovariantní tenzorové pole jako soubor n^p funkcí $f_{i_1 \dots i_p}$, jež se při změně báze transformují podle formule (2). Takový soubor funkcí určuje p-lineární zobrazení vztahem (1).

Množinu všech p-lineárních forem na vektorovém prostoru V označujeme $T_p V$. Zaveďme algebraické operace s p-lineárními formami.

Definice. Buďte f a g dvě p-lineární formy. *Součet* forem f a g definujeme jako zobrazení $f + g : V^p \to \mathbf{R}$ zadané předpisem

$$(f + g)(u_1, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_p) + g(u_1, \dots, u_p).$$

Je-li $a \in \mathbf{R}$ skalár, pak definujeme *a-násobek* formy f jako zobrazení $af : V^p \to \mathbf{R}$ zadané předpisem

$$(af)(u_1, \dots, u_p) = af(u_1, \dots, u_p).$$

Snadno se ověří (cvičení), že $f + g$ a af jsou zase p-lineární formy. Dokonce jsou splněny axiomy vektorového prostoru:

Důsledek. *Množina $T_p V$ všech p-lineárních forem na prostoru V je vektorový prostor vzhledem ke sčítání forem a násobení skalárem.*

Definice. *Tenzorový součin* formy $f \in T_p V$ a $g \in T_q V$ definujeme jako zobrazení $f \otimes g : V^{p+q} \to \mathbf{R}$ zadané předpisem

$$(f \otimes g)(u_1, \dots, u_{p+q}) = f(u_1, \dots, u_p) \cdot g(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}).$$

Snadno se ověří (cvičení), že tenzorový součin p-lineární formy a q-lineární formy je $(p + q)$-lineární forma.

Tvrzení. *Nechť $f \in T_p V$, $g \in T_q V$, $h \in T_r V$, $a \in \mathbf{R}$. Pak platí:*
(1) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$;
(2) $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$;
(3) $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$;
(4) $(af) \otimes h = a(f \otimes h) = f \otimes (ah)$.

Důkaz. Cvičení.

Obecně však tenzorový součin není komutativní: $f \otimes g \neq g \otimes f$.

Cvičení. Dokažte formule pro složky:

$$(f+g)_{i_1 \cdots i_p} = f_{i_1 \cdots i_p} + g_{i_1 \cdots i_p},$$

$$(f \otimes g)_{i_1 \cdots i_{p+q}} = f_{i_1 \cdots i_p} \cdot g_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}}.$$

Prostor $T_1 V$ se alternativně označuje V^* a nazývá se *duální* prostor k prostoru V. Ukážeme, že s každou bazí prostoru V je spojena jistá báze prostoru V^*.

Buď $e_1, \dots, e_n$ nějaká báze v prostoru V. Souřadnice vektoru $x \in V$ v bázi $e_1, \dots, e_n$ označme $x^1, \dots, x^n$ (pak platí $x = x^j e_j$). Pro $1 \leq i \leq n$ zaveďme zobrazení $e^i : V \to \mathbf{R}$ předpisem $x \mapsto x^i$. To jest,

$$e^i(x^j e_j) = x^i.$$

Zobrazení e^i jsou lineární (cvičení), a proto $e^i \in V^*$. Máme

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

kde δ^i_j je známé Kroneckerovo delta:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení. *Buď $e_1, \dots, e_n$ báze v prostoru V, buď $f \in V^*$ libovolná 1-forma se složkami $f_i = f(e_i)$. Pak*

$$f = f_i e^i.$$

Důkaz. Podle formule (1) je $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i = f_i e^i(x) = (f_i e^i)(x)$.

Tvrzení. *Buď $e_1, \dots, e_n$ báze v prostoru V. Pak formy $e^1, \dots, e^n$ tvoří bázi v prostoru V^*.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je každá 1-forma f lineární kombinací 1-forem e^i (koeficienty jsou složky f_i). Tudíž, formy e^i generují V^*.

Zároveň jsou nezávislé: Nechť $c_i e^i = 0$ pro nějaké koeficienty $c_i \in \mathbf{R}$. Dosazením e_j obdržíme $0 = c_i e^i(e_j) = c_j$.

Báze $e^1, \dots, e^n$ se nazývá *duální* k bázi $e_1, \dots, e_n$.

Důsledek. *Je-li prostor V konečněrozměrný, pak* $\dim V^* = \dim V$.

Podobně najdeme báze v prostorech $T_p V$.

Tvrzení. *Buď $e_1, \dots, e_n$ báze v prostoru V, buď $f \in T_p V$ libovolná p-forma se složkami $f_{i_1 \dots i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Pak*

$$f = f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}.$$

Důkaz. Podle formule (1) je opět $f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} e_{i_p}) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} f_{i_1 \dots i_p} = f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(x_1) \cdots e^{i_p}(x_p) = (f_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p})(x_1, \dots, x_p)$.

Tvrzení. *Buď* $e_1, \dots, e_n$ *báze v prostoru* V. *Pak formy* $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ *tvoří bázi prostoru* $T_p V$.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je každá p-forma f lineární kombinací p-forem $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ (koeficienty jsou složky $f_{i_1 \dots i_p}$). Tudíž, formy $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$ generují V^*.

Zároveň jsou nezávislé: Nechť $c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} = 0$ pro nějaké koeficienty $c_{i_1 \dots i_p} \in \mathbf{R}$. Dosazením $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ obdržíme $0 = c_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}(e_{j_1}) \cdots e^{i_p}(e_{j_p}) = c_{j_1 \dots j_p}$.

Důsledek. *Je-li prostor* V *konečněrozměrný, pak* $\dim T_p V = (\dim V)^p$.